Valversnelling en slinger

Arthur Adriaens — Tweede bachelor fysica en sterrenkunde — 01702014

1 Abstract

In dit verslag zal onderzoek gedaan worden naar de valversnelling g, de versnelling gerelateerd aan de kracht F die een object met massa m ondervindt op de aarde volgens $F = m * g$, en de wrijvingsconstante, een constante intrinsiek aan een object die bepaald in welke mate de kracht F afneemt door luchtweerstand in functie van de snelheid; van 3 verschillende voorwerpen. De valversnelling zal via 2 methodes worden verkregen, eerst via vrije val en vervolgens via een slinger. De gekozen voorwerpen voor de vrije val methode zijn een kiwi (ik beschikte niet over appels/appelsienen), een knikker en een prop papier. De verkregen waarden van de wrijvingsconstante zijn: kiwi: 8.8E-2$\frac{1}{s}$ ± 3.5E-2$\frac{1}{s}$, een prop papier: 3.77E-2$\frac{1}{s}$ ± 1.9E-2$\frac{1}{s}$ en een knikker: 2.3E-1$\frac{1}{s}$ ± 1.4E-2$\frac{1}{s}$. Hoewel dit niet fysisch lijkt aangezien een prop papier duidelijk meer wrijving zou moeten ondergaan en eerder tot stilstand komen dan een knikker, is het dit wel en lijkt het alleen zo omdat de massa's in rekening werden gebracht. Voor de methode met de slinger werd een usb-stick, een kerstbal en een speaker gebruikt. De zwaartekrachtconstante bekomen door een slinger met een kerstbal bleek het beste resultaat te geven met een g = 9.77$\frac{m}{s^2}$ ± 0.11$\frac{m}{s^2}$, waarbij de echte waarde (9.80$\frac{m}{s^2}$ [2]) dus binnen 68,27% significantie ligt.

2 Methode

2.1 Vrije val

Bij een object in vrije val kan rekening gehouden worden met luchtweerstand in de vorm van een evenredigheid met de snelheid [1] als volgt

$$ma = gm - bv \tag{1}$$

met b de wrijvingsconstante, g de valversnelling, a de versnelling van het voorwerp met massa m en v zijn snelheid, delen door de massa geeft

$$a = g - \frac{b}{m}v \tag{2}$$

en aangezien a = $\frac{dv}{dt}$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{b}{m}v \implies \frac{dv}{g - \frac{b}{m}v} = dt \implies \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{g - \frac{b}{m}v} = \int_0^t dt \implies v = \frac{mg}{b}(1 - e^{-\frac{b}{m}t}) + v_0 e^{-\frac{b}{m}t} \tag{3}$$

Merk op dat er geïntergreerd werd vanaf v_0 voor de snelheid in plaats van 0, dit is aangezien de vallende voorwerpen al een snelheid vertonen eer ze aan het gekozen nulpunt komen. De gebruikte opstelling is weergegeven in figuur 1, een meetlint is voor $0,750m \pm 0.005m$ vastgeplakt aan een tafelpoot waarvoor de gevraagde voorwerpen worden losgelaten. Het vallen van het voorwerp wordt vastgelegd op camera waarna de verkregen video wordt geanalyseerd met behulp van de software tracker. Hiermee kan op iedere frame de positie van het vallend voorwerp worden aangeduid, in referentie met de afstand vastgelegd door de meetlat, waardoor een verschillend aantal gegevens wordt bekomen zoals positie, snelheid en versnelling in functie van de tijd. Als we de snelheid uitzetten in functie van de tijd zouden we dus een curve verwachten waar vergelijking 3 aan gefit kan worden, dit bleek echter ongewenste resultaten te leveren. In de plaats daarvan werd dus overgegaan op g bepalen uit de benadering zonder wrijving $v = at + v_0 \implies \Delta v = a\Delta t \implies \frac{\Delta x_2 - \Delta x_1}{\Delta t} = a$ met Δx_2 het verschil in afstand tussen coördinaat 3 en 2, Δx_1 het verschil in afstand tussen coördinaat 2 en 1 en Δt de tijd tussen frames. Vergelijking 3 wordt dan later gebruikt om $\frac{b}{m}$ te bepalen waar na meting van de massa de wrijvingsconstante b mee kan bepaald worden. De fout op b wordt vervolgens bekomen door foutenpropagatie, aangezien $b = \frac{b}{m} * m$ is:

$$\sigma_b^2 = \left(\frac{db}{d\frac{b}{m}}\right)^2 \sigma_{\frac{b}{m}}^2 + \left(\frac{db}{dm}\right)^2 \sigma_m^2 \tag{4}$$

waarbij $\frac{b}{m}$ als 1 eenheid wordt gezien en waaruit de absolute fout σ_b vervolgens kan bekomen worden.

2.2 Slinger

Voor de slinger werd de rechteropstelling in figuur 1 genomen, we weten [1] dat de differentiaalvergelijking van een slinger met wrijving benaderend[1]

$$l\frac{d^2\theta}{d^2t} + b\frac{d\theta}{dt} + g\theta = 0 \tag{5}$$

is met θ de hoek die de slinger maakt, l de lengte, g de zwaartekrachtconstante en b het wrijvingscoëfficiënt. De oplossing heeft als vorm

$$Ae^{-\gamma t}cos(\omega' t) \tag{6}$$

met

$$\gamma = \frac{b}{2l} \text{ en } \omega' = \sqrt{\frac{g}{l} - \frac{b^2}{4l^2}} \tag{7}$$

b kan bepaald worden door te kijken na welke tijd de amplitude halveert aangezien

$$e^{-\gamma t_{helft}} = \frac{1}{2} \implies \gamma t_{helft} = ln(2) \implies \frac{b}{l} = \frac{2ln(2)}{t_{helft}} \implies b = \frac{2ln(2)l}{t_{helft}} \tag{8}$$

Vervolgens kan g bepaald worden uit de periode T, de tijd die de slinger vergt om terug op eenzelfde punt te komen, door

$$\frac{2\pi}{\omega'} = T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l} - \frac{b^2}{4l^2}}} \implies g = l * \left(\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 + \frac{b^2}{4l^2}\right) \tag{9}$$

dit werd waarschijnlijk verwacht als methode, in de plaats daarvan werd er aan de hand van tracker een rechtstreekse plot gemaakt van de positie van de slinger in functie van de tijd waaraan dan 6 werd gefit. g kan met deze methode als volgt worden gevonden:

$$\omega' = \sqrt{\frac{g}{l} - \frac{b^2}{4l^2}} \implies g = l * \left(\omega'^2 + \frac{b^2}{4l^2}\right) \overset{\gamma = \frac{b}{2l}}{=} l * \left(\omega'^2 + \gamma^2\right) \tag{10}$$

De fout op g wordt bekomen door foutenpropagatie, vertrekkende van 10:

$$\sigma_g^2 = \left(\frac{dg}{d\omega'}\right)^2 \sigma_{\omega'}^2 + \left(\frac{dg}{d\gamma}\right)^2 \sigma_\gamma^2 + \left(\frac{dg}{dl}\right)^2 \sigma_l^2 = (2l\omega')^2\sigma_{\omega'}^2 + (2l\gamma)^2\sigma_\gamma^2 + \left(\omega'^2 + \gamma^2\right)^2 \sigma_l^2 \tag{11}$$

Figuur 1: meetopstellingen: links vrije val en rechts de slinger

[1] aangezien $sin(\theta) \approx \theta$ voor kleine hoeken

3 Resultaten en bespreking

3.1 Vrije val

Na het uitvoeren van het experiment beschreven in subsectie 2.1 met als voorwerpen een kiwi, een knikker en een prop papier, worden de resultaten verkregen te zien in figuur 2. Hierbij is y de afstand gemeten van de top van de meetlat waarbij de richting naar boven werd gekozen. De verkregen snelheden in functie van de tijd zijn weergegeven in figuur 3, als hier met gnuplot een functie van dezelfde vorm als vergelijking 3 aan werd gefit werden onfysische waardes voor g bekomen (waaronder bv. $19\frac{m}{s^2}$). Daarom werd er overgegaan in de bepaling van g uit de initiële versnelling (volgens formule $v = a * t + v_0 = g * t + v_0$) Deze waren dan

$$\text{kiwi: } |\vec{g}| = 9.67\frac{m}{s^2} \pm 1.39\frac{m}{s^2}\text{ , prop: } |\vec{g}| = 9.27\frac{m}{s^2} \pm 3.2\frac{m}{s^2}\text{ , knikker: } |\vec{g}| = 9.41\frac{m}{s^2} \pm 2.84\frac{m}{s^2}$$

een fout vinden op deze waarden door bv. foutenpropagatie met de fout op de afstand bleek te kleine waarden te geven, daarom werd als fout overgegaan op de standaard deviatie gevonden door het programma tracker op het gemiddelde van alle versnellingen. Er wordt gekozen voor de zwaartekrachtconstante g van de kiwi ($=9.67\frac{m}{s^2} \pm 1.39\frac{m}{s^2}$) aangezien ze de minst grote beginsnelheid had en dus het minste luchtweerstand ondervond. Om nu de wrijvingsconstante b te bepalen wordt wel gebruik gemaakt van vergelijking 3, hierbij wordt voor de eindwaarden gekozen aangezien ze op een plot van positie in functie van tijd ongeveer een rechte beschrijven (zie figuur 2) en er dus nauwkeuriger aan de overeenkomstige snelheden kan gefit worden, dit werd gedaan met behulp van gnuplot met als resultaten tabel 1, waarbij aan de prop een rechte lijn van de vorm $\frac{mg}{b}$ werd gefit aangezien dit de terminale snelheid is (vergelijking 3 voor t naar oneindig). Er valt te zien dat er logische waarden bekomen worden voor $\frac{b}{m}$ (zoals verwacht vertraagt de prop het snelst, aangezien ze de kleinste massa heeft en de grootste oppervlakte).

object	v(t)	$\frac{b}{m}(\frac{kg}{s})$	massa (kg)	b $(\frac{1}{s})$
kiwi	$\frac{-g}{0.97}(1 - e^{-0.97*t}) - 0.95 * e^{-0.97*t}$	0.97 ± 0.38	0.090 ± 5E-3	8.8E-2 ± 3.5E-2
prop	$\approx -0.265 * g$	3.77 ± 0.03	0.01 ± 5E-3	3.77E-2 ± 1.9E-2
knikker	$-\frac{g}{2.58}(1 - e^{-2.58*t}) - 2.22 * e^{-2.58*t}$	2.58 ± 0.05	0.09 ± 5E-3	2.3E-1 ± 1.4E-2

Tabel 1: gefitte v(t) voor de gemeten objecten en bijbehorende $\frac{b}{m}$, massa en b

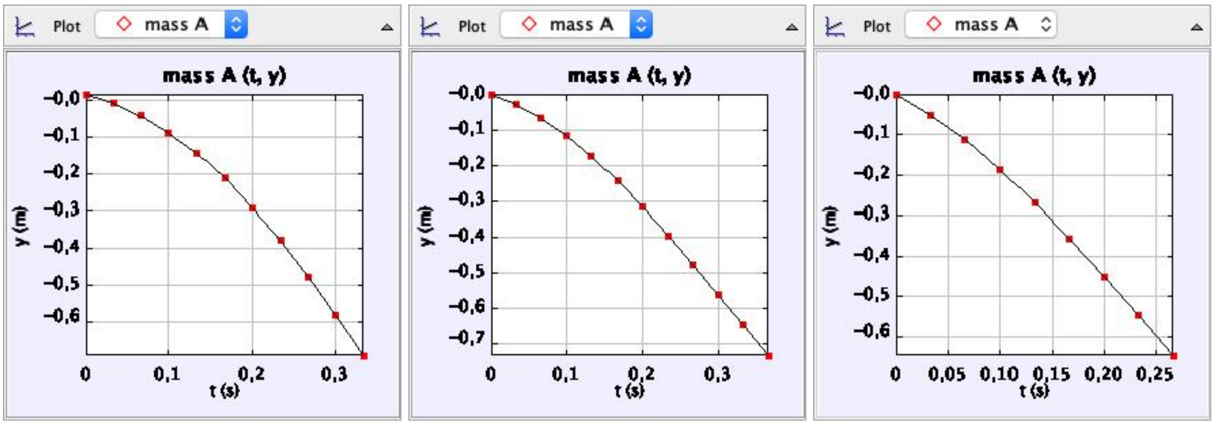
3.2 Slinger

Zoals besproken in sectie 2.2 wordt een directe fit gedaan aan de positie in functie van de tijd van verscheidene voorwerpen bevestigd aan de slinger, waarna uit de gefitte waarden g kan berekend worden; de voorwerpen zijn: een USB-stick, een kerstbal en een speaker. De verkregen resultaten zijn weergegeven in figuur 5.

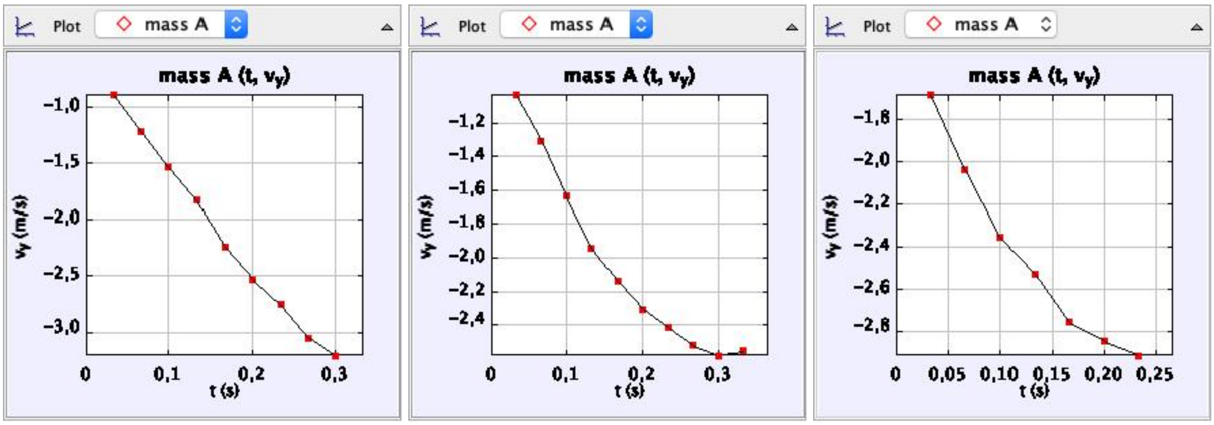
Gnuplot berekent bij het fitten samen met de gezochte waarden γ en ω' ook direct de (absolute) fout erop, die waarden zijn weergegeven in tabel 2 samen met de daaruit berekende zwaartekrachtconstante g (berekend aan de hand van vergelijking 10 en de fout met 11). Aangezien de echte waarde van g gemiddeld ≈ 9.80 bedraagt [2] geeft de kerstbal het beste resultaat, het is logisch te verklaren waarom de usb er verder van ligt: de usb werd vastgemaakt aan een ring, waardoor ze een klein beetje als dubbele pendulum fungeerden wat dus minder nauwkeurige waarden gaf, ook was de lengte van het touw niet de lengte tot het massamiddelpunt. Hoewel de kerstbal ook vasthing aan een ring ondervond ze zeer weinig effect van deze factoren aangezien haar massamiddelpunt rond de ring ligt.

object	lengte touw (m)	γ $(\frac{m}{s^2})$	ω' $(\frac{rad}{s})$	g $(\frac{m}{s^2})$
USB	4.32E-1 ± 5E-3	6.1E-2 ± 9E-3	4.83 ± 0.01	10.08 ± 0.12
kerstbal	4.78E-1 ± 5E-3	5.2E-2 ± 2.0E-2	4.52 ± 0.01	9.77 ± 0.11
speaker	3.63E-1 ± 5E-3	2.3E-2 ± 9E-3	52.10E-1 ± 5E-3	9.85 ± 0.14

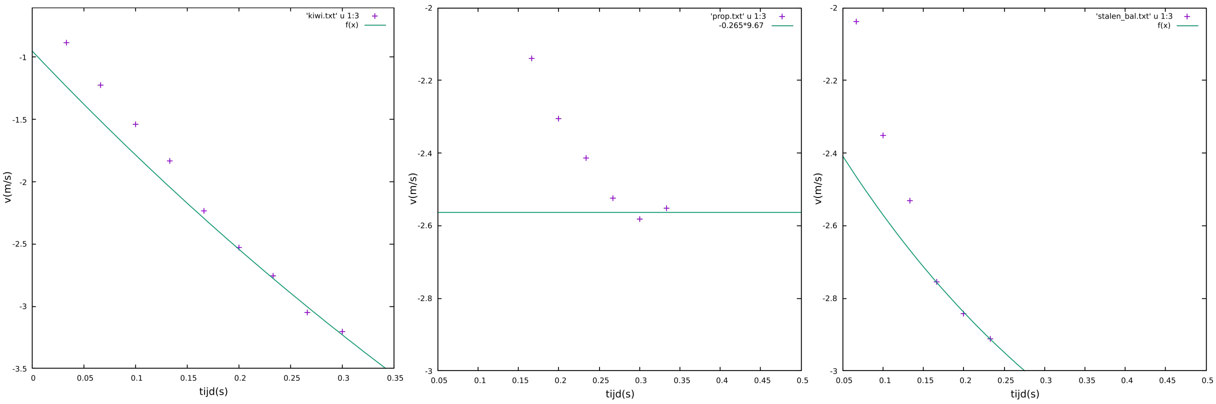
Tabel 2: De voorwerpen met hun lengte touw, γ, ω' en de daaruit verkregen zwaartekrachtconstante



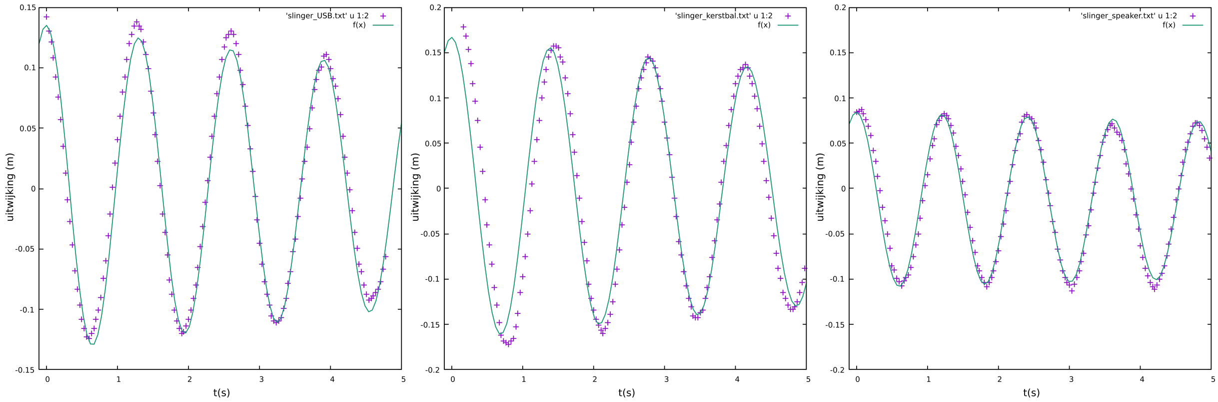
Figuur 2: positiemeting in functie van de tijd van respectievelijk de kiwi, de prop papier en de knikker



Figuur 3: snelheid in functie van de tijd van respectievelijk de kiwi, de prop papier en de knikker



Figuur 4: snelheid in functie van de tijd met fit van respectievelijk de kiwi, de prop papier en de knikker met fit



Figuur 5: Uitwijking van de slinger met fit van respectievelijk de USB, de kerstbal en de speaker

4 Besluit

De zwaartekrachtconstante g kan duidelijk beter gemeten worden aan de hand van een pendulum dan door een voorwerp in vrije val, dit is vooral te zien aan het voornaamste resultaat verkregen uit de bepaling van de constante aan de hand van een slingerende kerstbal: g $= 9.77\frac{m}{s^2} \pm 0.11\frac{m}{s^2}$ en speaker: $9.85\frac{m}{s^2} \pm 0.14\frac{m}{s^2}$, hierbij ligt de echte waarde $9.8\frac{m}{s^2}$ dus binnen het significantieniveau, en dan als contrast uit een vallende kiwi: 9.67 $\frac{m}{s^2} \pm 1.39\frac{m}{s^2}$ waarbij dit ook zo is maar ze ligt er verder van en de fout is veel groter. Ook hebben we uit het experiment met betrekking tot de vrije val wrijvingscoëfficiënten vergregen voor een kiwi: 8.8E-2 $\frac{1}{s} \pm$ 3.5E-2$\frac{1}{s}$, een prop papier: 3.77E-2$\frac{1}{s} \pm$ 1.9E-2$\frac{1}{s}$ en een knikker: 2.3E-1$\frac{1}{s} \pm$ 1.4E-2$\frac{1}{s}$, alhoewel deze metingen niet al te juist lijken aangezien een prop papier sowieso meer wrijving zou ondervinden dan een kiwi, is dit enkel een gevolg door in rekening brengen van de massa's en dus wel degelijk fysische resultaten.

Referenties

[1] Douglas C. Giancoli. *Natuurkunde: Mechanica en thermodynamica*. Pearson.

[2] Christian Hirt, Sten Claessens, Thomas Fecher, Michael Kuhn, Roland Pail, and Moritz Rexer. New ultrahigh-resolution picture of earth's gravity field. 40(16):4279–4283, August 2013.