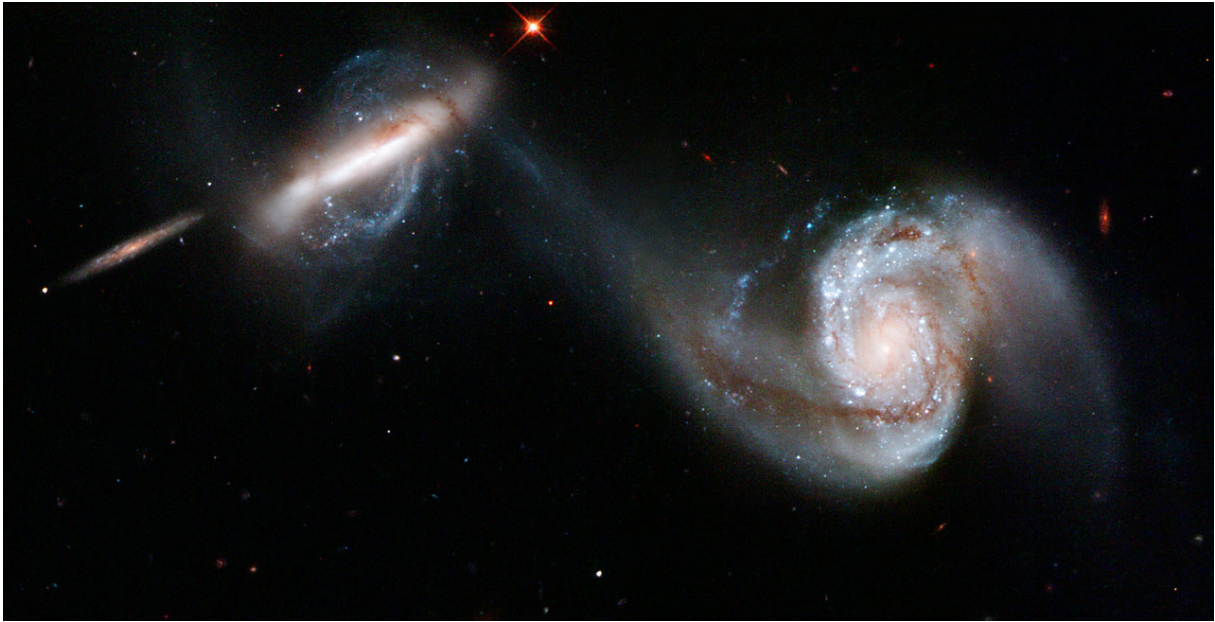


Ontmoetingen op hoge snelheid

Arthur Adriaens

Mei 2021



Figuur 1: Arp87

Impulsbenadering

Een belangrijk fenomeen in de fysica van galaxieën zijn zogenaamde “ontmoetingen op hoge snelheid”, hierbij hebben we een galaxie en object (dit mag een andere galaxie zijn maar ook een zwart gat, gasnevel,...) die elkaar op een zodanig hoge snelheid passeren dat de interactietijd (tijd waarbij uitgeoefende zwaartekrachteffecten significant zijn) klein is in vergelijking met een tijdschaal genaamd de 'crossing time'. Deze tijdschaal is gedefinieerd als de straal over de snelheid van de galaxie. Dit kan bijvoorbeeld berekend worden voor een uniforme bol met massa M en straal R waar we als snelheid de cirkelsnelheid

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

hebben en als dichtheid

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

waaruit we de crossing time kunnen afleiden:

$$t_{cross} = \sqrt{\frac{3}{4\pi G\rho}} \quad (1)$$

Hoe hoger de relatieve snelheid van de galaxie en het object, hoe korter de duur dat ze door elkaar bewegen en hoe kleiner de snelheidsimpuls $\Delta v = \int dt \mathbf{g}(\mathbf{t})$ die de galaxie ondervindt door het zwaartekrachtepotentiaal $\mathbf{g}(\mathbf{t})$ van het passerend object. Bijgevolg kunnen we een hoge-snelheidsontmoeting beschouwen als een kleine perturbatie op een systeem in evenwicht,

m.a.w als de relatieve snelheid groot genoeg is dan hebben we de volgende eigenschappen:

- Kinetische energie van de relatieve beweging \gg gemeenschappelijke potentiale energie
- Voor het merendeel van de ontmoeting bewegen de sterren bijna niet van hun oorspronkelijke baan

Door deze 2de eigenschap kunnen we de zwaartekracht van het object als kortstondige impuls benaderen, een dergelijke **impulsbenadering** blijkt nuttig aangezien ze ook zeer goed overeenstemt met simulaties [1]. We zullen nu het effect van zo een hoge-snelheidsontmoeting tussen een galaxie met massa M_g en een object met massa M_o met een relatieve snelheid V en een impactparameter b op de structuur van de galaxie analyseren, hiervoor bekijken we alles relatief vanuit het massamiddelpunt (mm):

Beschouwen we een ster i in de galaxie met massa m_i en $\dot{\mathbf{v}}_i'$ de verandering in de snelheid door de uitgeoefende kracht van het passerend object, dan kunnen we de verandering van de massamiddelpuntsnelheid schrijven als:

$$\dot{\mathbf{v}}_{mm} := \frac{1}{M_g} \sum_{\beta} m_{\beta} \dot{\mathbf{v}}_{\beta}' \quad \text{met} \quad M_g = \sum_{\beta} m_{\beta} \quad (2)$$

De component $\dot{\mathbf{v}}_i := \dot{\mathbf{v}}_i' - \dot{\mathbf{v}}_{mm}$ geeft dan de relatieve snelheidsverandering van ster i . Zij nu $\Phi(\mathbf{x}, t)$ het zwaartekrachtpotentiaal (gedefinieerd als $V = \frac{U}{m}$ met U de gravitationele potentiële energie) veroorzaakt door het object waaraan we enkel het tijdstip en de positie van de te beschouwen ster \mathbf{x} mee dienen te geven aangezien we het potentiaal zo definiëren dat het traject en de massa van het object erin verwerkt zit (of meervoudig in geval van een galaxie). Nu hebben we dat, aangezien $\mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}} = -\nabla U = -m\nabla V$ [2]:

$$\dot{\mathbf{v}}_i' = -\nabla\Phi(\mathbf{x}_i, t) \quad (3)$$

Waardoor we de relatieve snelheidsverandering kunnen herschrijven als:

$$\dot{\mathbf{v}}_i = -\nabla\Phi(\mathbf{x}_i, t) + \frac{1}{M_g} \sum_{\beta} m_{\beta} \nabla\Phi(\mathbf{x}_{\beta}, t) \quad (4)$$

Nu verandert \mathbf{x}_i in onze impulsbenadering niet (gedefinieerd ten opzichte van het centrum van de galaxie) waardoor we de totale verandering in de snelheid kunnen vinden door integratie (met $t=0$ gedefinieerd als het tijdstip waarop de botsing plaatsvindt):

$$\Delta\mathbf{v}_i = \int_0^{\infty} dt \dot{\mathbf{v}}_i \stackrel{4}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dt \left[-\nabla\Phi(\mathbf{x}_i, t) + \frac{1}{M_g} \sum_{\beta} m_{\beta} \nabla\Phi(\mathbf{x}_{\beta}, t) \right] \quad (5)$$

Nu verandert de potentiële energie bijna niet vergeleken met de interne kinetische energie (1ste puntje bij de opsomming op pagina 1) en kunnen we dus bij benadering stellen dat deze verandering van kinetische energie de enige bijdrage is aan de verandering van de totale energie:

$$\begin{aligned} \Delta E \approx \Delta K &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{v}_i + \Delta\mathbf{v}_i)^2 - \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{v}_i^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i [(\mathbf{v}_i + \Delta\mathbf{v}_i)^2 - \mathbf{v}_i^2] \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i [|\Delta\mathbf{v}_i|^2 + 2\mathbf{v}_i \cdot \Delta\mathbf{v}_i] \end{aligned} \quad (6)$$

Nu is $\sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \Delta\mathbf{v}_i = 0$, dit kan aangetoond worden door eerst te kijken naar de continuïteitsbenadering (dichtheid ρ) (oef 8.5 in [3]):

$$\sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \Delta\mathbf{v}_i \approx \int dV \rho(\mathbf{v} \cdot \Delta\mathbf{v}) \quad (7)$$

Waarna we bij een axiaal symmetrische galaxie kunnen stellen dat in cilindrische coördinaten $\mathbf{v} = \omega R \vec{e}_{\phi}$ en dat uit 5:

$$\Delta\mathbf{v} = \int_0^{\infty} dt \left[-\nabla\Phi(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{M_g} \sum_{\beta} m_{\beta} \nabla\Phi(\mathbf{x}, t) \right] = -\nabla\chi(\mathbf{x}) \quad (8)$$

zodat we krijgen:

$$\int dV \rho(\mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{v}) = - \int \rho R \omega R \vec{e}_\phi \nabla \chi(\mathbf{x}) dR d\phi dz \quad (9)$$

$$= - \int \rho R \omega \frac{\partial \chi(R)}{\partial \phi} dR d\phi dz = 0 \quad (10)$$

Waar gebruik werd gemaakt van het feit dat in een axiaalsymmetrische galaxie de zwaartekrachtpotentiaal enkel afhankelijk is van de straal.

Bijgevolg hebben we dus dat:

$$\Delta E \approx \frac{1}{2} \sum_i m_i |\Delta \mathbf{v}_i|^2 \quad (11)$$

Nu zijn er enkele subtiliteiten die in acht dienen genomen worden bij deze vergelijkingen: eerst en vooral is vergelijking 6 een sommatie over alle sterren in de galaxie maar beschrijft deze niet wat er gebeurt met de individuele sterren. Enkele sterren hebben $\mathbf{v}_i \cdot \Delta \mathbf{v}_i > 0$ terwijl anderen $\mathbf{v}_i \cdot \Delta \mathbf{v}_i < 0$ hebben, dewelke wel netto elkaar opheffen volgens $\sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \Delta \mathbf{v}_i = 0$ maar door deze toevoeging aan energie bij bepaalde sterren kunnen deze zodanig snel bewegen dat ze uit de galaxie worden geslingerd en waardoor we dus massaverlies hebben. Om de 2de subtiliteit te spotten dienen we te kijken naar vergelijking 5, de sterren waren voor de interactie in evenwicht en voldeden dus aan het viriaaltheorema (zie vergelijking 2.79 in de cursus). Krijgen deze echter deze snelheidsverandering dan is hier niet meer aan voldaan en dus dient het systeem zich te herstellen over enkele cycli, om te begrijpen hoe dit in zijn werk gaat kunnen we kijken naar vergelijking 2.80 uit de cursus met K de kinetische energie en E de totale energie:

Oorspronkelijk wordt voldaan aan de vergelijking

$$E = -K \quad (12)$$

Nu wordt door 5 de kinetische energie verhoogt met een fractie ΔK :

$$E' = E + \Delta K \quad (13)$$

Deze galaxie zal zich vervolgens herstellen om weer te voldoen aan het viriaaltheorema, hierdoor krijgen we:

$$K' = -E' = -E - \Delta K = K - \Delta K \quad (14)$$

We hebben dus dat als de kinetische energie verhoogt wordt tot $K' = K + \Delta K$ deze daarna terugvalt met $2\Delta K$ naar $K' = K - \Delta K$.

Om de laatste subtiliteit te weten te komen dienen we te kijken naar het centrum van de galaxie, hier ondervindt een ster die dicht bij de kern cirkelt een traag variërend zwaartekrachtpotentiaal $\Phi(R, \phi)$, de relevante actie-hoekvariabele J_ϕ wordt dan gegeven door (zie C.5 in de cursus):

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint p^i dq^i \implies J_\phi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi p_\phi \quad (15)$$

Oorspronkelijk (voor de perturbatie) is het zwaartekrachtpotentiaal axiaal symmetrisch en is (zie vergelijking 1.26 in de cursus) $p_\phi = L_z$ waaruit volgt dat de actie-hoekvariabele J_ϕ triviaal gelijk is aan L_z , als deze potentiaal echter traag geperturbeerd wordt naar een nieuwe axiaal symmetrische configuratie dan blijft deze actie-hoekvariabele ongewijzigd aangezien ze adiabatisch invariant is (goldstein [2] hoofdstuk 12.5). Hierdoor heeft de ster eenzelfde draaimoment op het einde als in het begin hoewel p_ϕ wel ogenblikkelijk veranderde.

Nu is de impuls-benadering enkel geldig als de interactietijd klein is vergeleken met de crossing time. Aangezien dit laatste sterk afhankelijk is van de straal tot het centrum, is deze effectief te klein dicht bij het centrum en hebben we te maken met een traag perturberend potentiaal waardoor deze zoals voordien uitgelegd de oorspronkelijke configuratie heeft na de interactie. Anders gezegd wordt deze eerst gedeformeerd naarmate het object nadert waarna het zich herstelt bij het verwijderen van het object.

Ver-getij benadering

Wanneer de impactparameter veel groter is dan de beschouwde galaxie worden de berekeningen een stuk makkelijker: laten we wederom $\Phi(\mathbf{x}, t)$ het zwaartekrachtspotentialiaal van het verstorend object zijn gedefinieerd in het massamiddelpuntstelsel van de galaxie dan hebben we nu, doordat $b \gg R_g$, dat dit potentialiaal traag varieert waardoor we een Taylorontwikkeling mogen uitvoeren op $-\nabla\Phi(\mathbf{x}, t)$ rond $\mathbf{x} = 0$:

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial\Phi(t)}{\partial x_j}\Big|_{\mathbf{x}=0} - \sum_k \frac{\partial^2\Phi(t)}{\partial x_j\partial x_k}\Big|_{\mathbf{x}=0} x_k + O(|\mathbf{x}|^2) \quad (16)$$

Geschreven in Einstein-notatie met $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, definiëren we nu

$$\Phi_j := \frac{\partial\Phi(t)}{\partial x_j}\Big|_{\mathbf{x}=0} \quad \text{en} \quad \Phi_{jk} := \frac{\partial^2\Phi(t)}{\partial x_j\partial x_k}\Big|_{\mathbf{x}=0}$$

ter vergemakkelijking van notatie en laten we de 2^{de} -orde term vallen, dan bekommen we de **ver-getij benadering**:

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}(\mathbf{x}, t) \approx -\Phi_j(t) - \sum_k \Phi_{jk}(t)x_k \quad (17)$$

Een interactie waarbij zowel de ver-getij benadering als de impulsbenadering geldig is wordt een **getij-schok** genoemd. Als we deze vergelijking invullen in 3 krijgen we dat ($i = \beta$ nemend en met de conventie dat $x_{\beta k}$ de k-component is van de positievector van ster β):

$$\dot{\mathbf{v}}'_\beta = -\Phi(\mathbf{x}_\beta, t) \approx -\Phi_j(t) - \sum_k \Phi_{jk}(t)x_{\beta k}$$

Als we dit vervolgens invullen in vergelijking 2 zien we dat Φ_{jk} geen bijdrage levert aan de massamiddelpunt-versnelling $\dot{\mathbf{v}}_{mm}$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_{mm} &\approx \frac{1}{M_s} \left[-\sum_\beta m_\beta \Phi_j(t) - \sum_\beta \sum_k m_\beta \Phi_{jk}(t)x_{\beta k} \right] \\ &= -\frac{1}{M_s} \left[\sum_\beta m_\beta \Phi_j(t) + \sum_\beta m_\beta \sum_k \Phi_{jk}(t)x_{\beta k} \right] \\ &= -\frac{1}{M_s} \left[\sum_\beta m_\beta \Phi_j(t) + \Phi_j(t) \sum_\beta m_\beta \mathbf{x}_\beta \right] \\ &= -\frac{1}{M_s} \sum_\beta m_\beta \Phi_j(t) \end{aligned}$$

Waar we gebruik gemaakt hebben van het feit dat het massamiddelpuntstelsel zo is gedefinieerd dat daar $\sum_\beta m_\beta \mathbf{x}_\beta = 0$.

Analoog, als we 17 in vergelijking 4 invullen kunnen we zien dat Φ_j geen bijdrage levert aan $\dot{\mathbf{v}}_\alpha$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_\alpha &\approx -\Phi_j(t) - \sum_k \Phi_{jk}(t)x_{\alpha k} + \frac{1}{M_s} \sum_\beta m_\beta \left(\Phi_j + \sum_k \Phi_{jk}x_{\beta k} \right) \\ &\stackrel{\sum_\beta m_\beta = M_s}{=} -\Phi_j(t) + \Phi_j(t) + \frac{1}{M_s} \sum_\beta m_\beta \sum_k \Phi_{jk}x_{\beta k} - \sum_k \Phi_{jk}(t)x_{\alpha k} \\ &= \frac{1}{M_s} \Phi_j(t) \sum_\beta m_\beta \mathbf{x}_\beta - \sum_k \Phi_{jk}(t)x_{\alpha k} \\ &= -\sum_k \Phi_{jk}(t)x_{\alpha k} \end{aligned}$$

Als we nu vermenigvuldigen met de eenheidsvector $\hat{\mathbf{e}}_j$ en sommeren over j om van Einstein-notatie naar de volwaardige vector te gaan en wederom α gebruiken voor ster alfa, dan krijgen we:

$$\dot{\mathbf{v}}_\alpha = -\sum_{j,k=1}^3 \hat{\mathbf{e}}_j \Phi_{jk} x_{\alpha k} \quad (18)$$

Nu geldt voor een sferisch symmetrische functie van de vorm $S(|\mathbf{R}|)$:

$$\partial_j S(|\mathbf{R}|) = S' \partial_j (|\mathbf{R}|) = S' \partial_j \left[\left(\sum_i R_i^2 \right)^{1/2} \right] = S' \frac{2R_j}{2(\sum_i R_i^2)^{1/2}} = S' \frac{R_j}{R} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \partial_j \partial_k S(|\mathbf{R}|) &= \partial_j \left(S' \frac{R_k}{R} \right) = S'' \frac{R_j R_k}{R^2} + S' \frac{\delta_{jk}}{R} + S' R_k \partial_j \left(\frac{1}{R} \right) \\ &= S'' \frac{R_j R_k}{R^2} + S' \frac{\delta_{jk}}{R} + S' \frac{R_j R_k}{R^3} \\ &= \left(S'' - \frac{S'}{R} \right) \frac{R_j R_k}{R^2} + \frac{S'}{R} \delta_{jk} \end{aligned} \quad (20)$$

Met $|\mathbf{R}| := R$ en $S' := \frac{\partial S}{\partial R}$.

Als het object nu sferisch is en gecentreerd op $\mathbf{X}(t)$, dan kunnen we schrijven dat $\Phi(\mathbf{x}, t) = \Phi(|\mathbf{x} - \mathbf{X}(t)|)$ en gebruik makend van vergelijkingen 19 en 20:

$$\Phi_j = -\Phi' \frac{X_j}{X} \quad ; \quad \Phi_{jk} = \left(\Phi'' - \frac{\Phi}{X} \right) \frac{X_j X_k}{X^2} + \frac{\Phi'}{X} \delta_{jk} \quad (21)$$

Er is echter een belangrijk speciaal geval die zich voordoet wanneer de impactparameter zodanig groot is dat we het object als een puntmassa met massa M_o kunnen zien. Dan hebben we dat $\Phi(X) = \frac{-GM_o}{X}$ en hebben we dat:

$$\Phi_j = -\frac{GM_o}{X^3} X_j \quad ; \quad \Phi_{jk} = \frac{GM_o}{X^3} \delta_{jk} - \frac{3GM_o}{X^5} X_j X_k \quad (22)$$

Als we dit dus vervolgens invullen in vergelijking 18, dan krijgen we:

$$\dot{\mathbf{v}}_\alpha = -\frac{GM_o}{X^3} \mathbf{x}_\alpha + \frac{3GM_o}{X^5} (\mathbf{X} \cdot \mathbf{x}_\alpha) \mathbf{X} \quad (23)$$

In de impulsbenadering gaan we ervan uit dat de galaxie en het object een constante relatieve snelheid \mathbf{V} hebben, draaien we ons coördinatenstelsel nu zodanig dat deze langs de z-as gelegen is en het object zijn orbitaal in het yz-vlak. Dan hebben we dat $\mathbf{X}(t) = (0, b, Vt)$ en dus dat:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_\alpha &= -\frac{GM_o}{[b^2 + (Vt)^2]^{3/2}} \mathbf{x}_\alpha + \frac{3GM_o}{[b^2 + (Vt)^2]^{5/2}} (x_{\alpha y} b + x_{\alpha z} Vt) (b \hat{\mathbf{e}}_y + Vt \hat{\mathbf{e}}_z) \\ &= -\frac{GM_o}{[b^2 + (Vt)^2]^{3/2}} \mathbf{x}_\alpha + \frac{3GM_o}{[b^2 + (Vt)^2]^{5/2}} (y_\alpha b + z_\alpha Vt) (b \hat{\mathbf{e}}_y + Vt \hat{\mathbf{e}}_z) \end{aligned} \quad (24)$$

Waar we op het einde $x_{\alpha y} := y_\alpha$ en $x_{\alpha z} := z_\alpha$ hebben gedefinieerd ter vergemakkelijking van notatie.

Nu is in de impulsbenadering \mathbf{x}_α ook constant waardoor, analoog als in vergelijking 5, we vergelijking 24 kunnen integreren over de totale tijd:

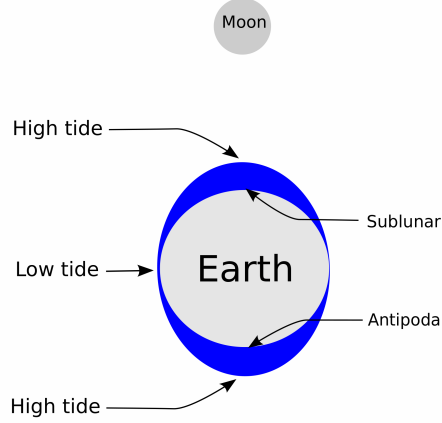
$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{v}_\alpha &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \dot{\mathbf{v}}_\alpha \\ &= GM_o \int_{-\infty}^{\infty} dt \left\{ -\frac{(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)}{[b^2 + (Vt)^2]^{3/2}} + \frac{3(y_\alpha b + z_\alpha Vt)(0, b, Vt)}{[b^2 + (Vt)^2]^{5/2}} \right\} \\ &= GM_o \int_{-\infty}^{\infty} dt \left\{ -\frac{(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)[b^2 + (Vt)^2]}{[b^2 + (Vt)^2]^{5/2}} + \frac{3(0, y_\alpha b^2 + z_\alpha Vtb, y_\alpha Vtb + z_\alpha (Vt)^2)}{[b^2 + (Vt)^2]^{5/2}} \right\} \\ &= GM_o \int_{-\infty}^{\infty} dt \left(-\frac{x_\alpha b^2 + x_\alpha (Vt)^2}{[b^2 + (Vt)^2]^{5/2}}, \frac{-y_\alpha b^2 - y_\alpha (Vt)^2 + 3y_\alpha b^2 + z_\alpha Vtb}{[b^2 + (Vt)^2]^{5/2}}, \frac{-z_\alpha b^2 - z_\alpha (Vt)^2 + y_\alpha Vtb + z_\alpha (Vt)^2}{[b^2 + (Vt)^2]^{5/2}} \right) \\ &\stackrel{u=\frac{Vt}{b}}{=} \frac{GM_o}{b^3} \frac{b}{V} \int_{-\infty}^{\infty} du \left(-x_\alpha \frac{1+u^2}{[1+u^2]^{5/2}}, y_\alpha \frac{2-u^2}{[1+u^2]^{5/2}} + z_\alpha \frac{u}{[1+u^2]^{5/2}}, z_\alpha \frac{2u^2-1}{[1+u^2]^{5/2}} + y_\alpha \frac{u}{[1+u^2]^{5/2}} \right) \\ &= \frac{GM_o}{Vb^2} \int_{-\infty}^{\infty} du \left(-x_\alpha \frac{du}{[1+u^2]^{3/2}}, y_\alpha \frac{2-u^2}{[1+u^2]^{5/2}}, z_\alpha \frac{2u^2-1}{[1+u^2]^{5/2}} \right) \end{aligned} \quad (25)$$

Waar op het einde gebruik werd gemaakt van het feit dat $\int_{-\infty}^{\infty} u du = 0$ aangezien u een oneven functie is.

Als we deze integralen evalueren verkrijgen we dan als eindresultaat dat:

$$\Delta \mathbf{v}_\alpha = \frac{2GM_o}{b^2V}(-x_\alpha, y_\alpha, 0) \quad (26)$$

Met een fout op deze formule van de orde $|\mathbf{x}|/b \ll 1$. Deze snelheidsveranderingen hebben gewoonlijk als gevolg op een bol sterren dat deze vervormt wordt tot een ellipsoïde met de lange as gericht volgens de richting waar het object zich het dichtst bij de galaxie bevindt (hier de y-as) en is gelijkaardig aan hoe de maan de getijdes van de zee veroorzaakt (zie figuur 2):



Figuur 2: Overdreven voorstelling van de invloed van de maan op het getij¹

Als we nu deze gevonden formule invullen in vergelijking 11 dan krijgen we [4]:

$$\Delta E = \frac{2G^2M_o^2}{V^2b^4} \sum_{\alpha} m_{\alpha}(x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2) \quad (27)$$

Als de galaxie sferisch verondersteld kan worden, dan hebben we dat

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha}x_{\alpha}^2 = \sum_{\alpha} m_{\alpha}y_{\alpha}^2 = \frac{1}{3}M_g \langle r^2 \rangle$$

Met $\langle r^2 \rangle$ het massa-gewogen rekenkundig gemiddelde van de kwadraten (de factor $\frac{1}{3}$ duidt op doordat er 3 dimensies zijn). In dat geval wordt vergelijking 27:

$$\Delta E = \frac{4G^2M_o^2M_s}{3V^2b^4} \langle r^2 \rangle \quad (28)$$

We zien aan deze vergelijking dat de energie die in de galaxie wordt gepompt door een vlugge flyby-interactie met een voorbij scherend object varieert als $\sim b^{-4}$, en dus hebben de objecten met de kleinste impactparameter het grootste effect. Helaas is voor zo'n dichte ontmoeting echter de puntmassa-benadering van het object niet geldig.

Kwalitatief wordt verwacht dat dergelijke toevoeging van energie op lange termijn door het viriaaltheorema de galaxie zal doen uitzetten, en zelfs sommige sterren uit hun baan doen slingeren. Uit hoofdstuk 1.3.2: 'Banen in triaxiale Stäckelpotentialen' kunnen we echter ook besluiten dat het mogelijk is dat, als er voldoende energie wordt toegevoegd, de baanstructuur kan veranderen.

¹Gemaakt door Chiswick Chap en vallend onder de Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported licentie

Referenties

- [1] L. A. Aguilar and S. D. M. White. Tidal interactions between spherical galaxies. *ApJ*, 295:374, August 1985.
- [2] H. Goldstein and C.P. Poole. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley series in physics. Addison-Wesley Publishing Company, 1980.
- [3] Scott Tremaine James Binney. Galactic dynamics: 2nd edition. *Princeton Series in Astrophysics*, 2008.
- [4] Jr. Spitzer, Lyman. Disruption of Galactic Clusters. *ApJ*, 127:17, January 1958.